1994年　東大数学　文系第1問

(1) $\log_2 x \leqq 2+\log_2 y \leqq \log_2 x + \log_2(4-2x)$

$\Leftrightarrow$ $\log_2 x \leqq 2+\log_2 y$ $\cdots$ ①

かつ

$2+\log_2 y \leqq \log_2 x+\log_2(4-2x)$ $\cdots$ ②

真数条件から、$x>0$ かつ $y>0$ かつ $4-2x>0$

$\therefore$ $0<x<2$ かつ $0<y$ $\cdots$ ③

x と y の定義域

① より $\log_2 x \leqq \log_2 4+\log_2 y = \log_2 4y$

$\therefore$ $x \leqq 4y$ ($\because$ 底>1)

忘れずに。

$y \geqq \frac{1}{4}x$ $\cdots$ ①′

② より $\log_2 4+\log_2 y \leqq \log_2 x+\log_2(4-2x)$

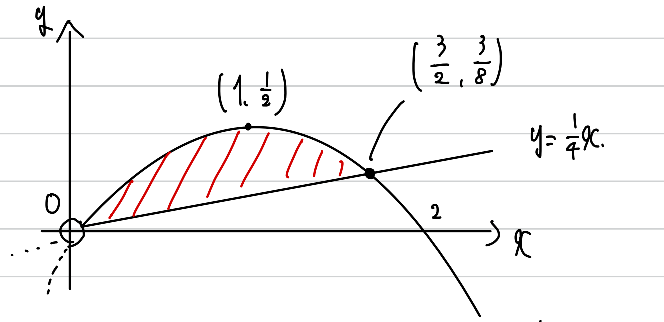
$\log_2 4y \leqq \log_2 x(4-2x)$

$\therefore$ $4y \leqq x(4-2x)$ ($\because$ 底>1)

忘れずに。

$y \leqq -\frac{1}{2}x(x-2)$ $\cdots$ ②′

①′ かつ ②′ かつ ③の領域を図示して。



赤の領域

(原点は除く。原点以外の境界は含む)

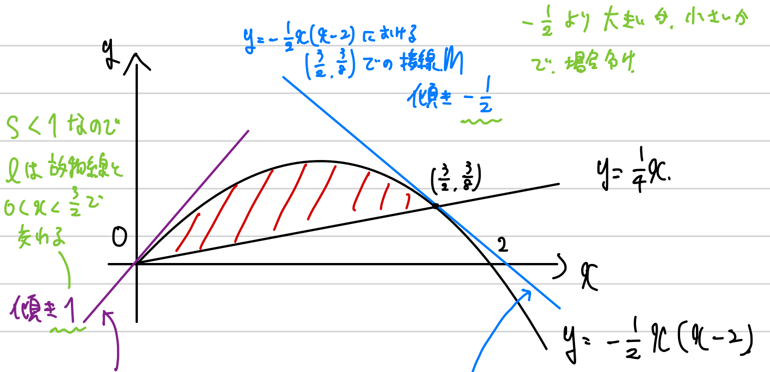
(2) $y-sx=k$ とおくと、

$y=sx+k$

これは、傾き s、y 切片 k の直線を表す。

この直線 l が、(1) の領域と共有点を持つ

ような、k の最大値 $f(s)$ を求めよ。



$y=-\frac{1}{2}x(x-2)=-\frac{1}{2}x^2+x$.

$y'=-x+1$

$x=0$ を代入して、$y'=1$

よって 接線の傾きは 1

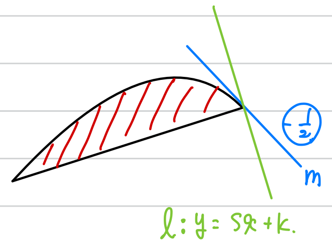
$y=-\frac{1}{2}x(x-2)=-\frac{1}{2}x^2+x$.

$y'=-x+1$

$x=\frac{3}{2}$ を代入して、$y'=-\frac{1}{2}$

よって、接線 m の傾きは $-\frac{1}{2}$

(i) $s \leqq -\frac{1}{2}$ の時



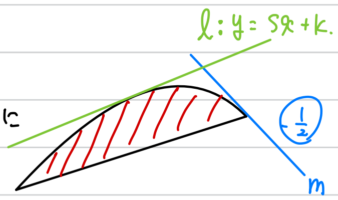
右図のように、l が $(\frac{3}{2},\frac{3}{8})$ を

通るとき、k が最大。

$k=y-sx=\frac{3}{8}-\frac{3}{2}s$

$\therefore$ $f(s)=\frac{3}{8}-\frac{3}{2}s$

(ii) $-\frac{1}{2} \leqq s<1$ の時



原点における放物線の接線の傾きが1

なので、l は、$0<x<\frac{3}{2}$で必ず右図のように

放物線と接し、このとき、k が最大。

$-\frac{1}{2}x(x-2)=sx+k$

$x^2+2(s-1)x+2k=0$

$D/4=(s-1)^2-2k=0$

$k=\frac{1}{2}(s-1)^2$

$\therefore$ $f(s)=\frac{1}{2}(s-1)^2$

よって $f(s)=\begin{cases} \frac{3}{8}-\frac{3}{2}s & (s \leqq -\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}(s-1)^2 & (-\frac{1}{2} \leqq s<1) \end{cases}$

$t=f(s)$ のグラフは